5.1 Функционалдық қатарлар.

Анықтама 1. Функционалдық қатар деп:

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ..., \quad (5)$$

мұндағы $u_i(x),\ i = 1,2,...$қатардың мүшелері функциялар болатын қатарды айтамыз.

x - ке қандай да бір тұрақты мән берсек, (5) қатары сандық қатарға айналады. Сонымен, x-тің қандай да бір мәндерінде (5) қатары жинақты, қандай да бір мәндерінде жинақсыз.

Анықтама 2. (5) қатары жинақты болатын x мәндер жиыны функционалдық қатардың жинақтылық облысы деп аталады.

Қатардың жинақтылық облысында қатардың қосындысы x-ке байланысты функция болатындықтан, қатардың қосындысын $S(x)$ деп белгілейміз.

Мысал 1. $|x|<1$ болған жағдайда, $1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$ қатары жинақты. Себебі, бұл қатар кемімелі геометриялық прогрессия ($a_1 = 1,\quad q = x$) және оның қосындысы $\frac{1}{1-x}$. Сонымен, (-1,1) интервалында берілген қатар жинақты және

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$ болса, онда $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ...$ - қатардың қалдық мүшесі.

Теорема 1. (5) қатарының жинақтылық облысында:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty}[S(x) - S_n(x)] = 0 .$$

5.2 Бірқалыпты жинақтылық. Функционалдық қатарларға қолданылатын амалдар.

Анықтама 3. (5) қатары небір D облысында мажорланған қатар деп аталады, егер $\forall x \in D$ үшін :

$$|u_1(x)| \le \alpha_1, |u_2(x)| \le \alpha_2, ..., |u_n(x)| \le \alpha_n, ...$$

теңсіздігі орындалатындай,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n + ..., \quad (5.1)$$

оң таңбалы жинақты сандық қатар табылса.

Мысал 2.

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + ... + \frac{\cos nx}{n^2} + ...$$

қатары барлық сан осінде мажорланған екені анық, өйткені,

$\forall x \in (-\infty, \infty) \Rightarrow \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \quad n = 1,2,...,$ ал $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$ - қатары жинақты қатар.

D облысында мажорланған қатар, осы D облысында абсолютті жинақты. .

Анықтама 4. $[a;b]$ аралығында жинақты (5) қатары бірқалыпты жинақты деп аталады, егер барлық $n \ge N$ үшін $\forall \varepsilon > 0 : \exists N,$

$$\left|S(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon \quad \forall x\in[a;b] \text{ болса.}$$

Теорема 2. $[a;b]$ аралығында мажорланған (5) қатары осы кесіндіде бірқалыпты жинақты.

2-теоремадан мажорланған қатар болу бірқалыпты жинақтылықтан да күшті шарт екенін көреміз, яғни, бірқалыпты жинақталатын, бірақ мажорланған емес қатарлар табылады.

Теорема 3. $[a;b]$ аралығында мажорланған үзіліссіз функциялар қатары болсын:

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, (5)$$

және $S(x)$ -қатардың қосындысы болсын. Онда шектері $[a;b]$ аралығындағы α -дан x - ке дейін болатын $S(x)$ - тен алынған интеграл осы қатардың мүшелерінен алынған осындай интегралдардың қосындысына тең болады, яғни:

$$\int_\alpha^x S(\mathrm{t})dt=\int_\alpha^x U_1(t)dt+\int_\alpha^x U_2(t)dt+\ldots+\int_\alpha^x U_n(t)dt+\ldots,\ \alpha\in[a;b]; x\in[a;b]$$

Ескерту: Егер қатар мажорланбаса, онда қатарды мүшелеп интегралдау орындалмайды.

Теорема 4 Егер мүшелерінің туындылары $[a;b]$ аралығында үзіліссіз болатын

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, (5)$$

қатары осы аралықта $S(x)$ қосындысына жинақты болса және қатар мүшелерінің туындыларынан құрылған

$$u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots, (5.2)$$

қатар $[a;b]$ аралығында мажорланатын қатар болса, онда туындылар қатарының қосындысы алғашқы қатар қосындысының туындысына тең болады, яғни:

$$s'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots.$$

Ескерту: Туындылар қатарының мажорлануына қойылған талап елеулі талап, себебі қатар мажорланбаса, онда мүшелеп дифференциалдау орындалмайды.

6. Дәрежелік қатарлар.

Анықтама 5. ($x-a$) –ға қатысты дәрежелік қатар деп:

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots\equiv\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k, \qquad (6)$$

түрінде берілген қатарды айтамыз, мұндағы $a_0, a_1, a_2,\ldots$ коэффиценттері – тұрақты сандар.

Егер $a=0$ болса, онда: $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\equiv\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$

(6.1)

Абель теоремасы.

1)Егер (6.1) қатары $x_0 \neq 0$ нүктесінің небір мәндерінде жинақты болса, онда ол $|x| < |x_0|$ болғанда абсолютті жинақты;

2) ал $x_0' \neq 0$ нүктесінің небір мәндерінде (6.1) қатары жинақсыз болса, онда $|x| > |x_0|$ тесіздігін қанағаттандыратын х – тің әрбір мәнінде (6.1) қатары жинақсызқатар болады.

Абель теоремасынан $|x| < R$ болғанда (6.1) қатары жинақты, ал $|x| > R$ үшін жинақсыз болатындай R санының бар екенін көреміз.

Дәрежелік қатардың жинақтылық облысы деп, центрі координаталар басында болатын интервал болады.

Анықтама. Дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы деп $(-R;R)$ интервалы аталады, және интервалдың ішінде орналасқан әрбір х – тің нүктелерінде қатар жинақты, және абсолютті жинақты қатар болады, ал интервалдан тысқары орналасқан х – тің нүктелерінде қатар жинақсыз болады.

R саны дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы деп аталады.

Интервалдың шеткі нүктелерінде қатардың жинақты, жинақсыз болуы әрбір қатарға жекеше зерттелінеді.

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ ақырлы шегі табылса, онда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ қатарына Даламбер белгісін қолдансақ, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot L < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{L} = R$, яғни, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Дәл осылай, Коши белгісін қолдансақ: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Мысал 6.1. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$ қатарының жинақтылық облысын табайық.

$a_n = \frac{1}{n}$ болғандықтан, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n=1}{n} = 1$ - жинақтылық радиусы. $x = \pm 1$ нүктелерінде жинақтылыққа зерттейміз.

$x = 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ - гармониялық қатар, жинақсыз болады.

$x = -1 \Rightarrow -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ...$-таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар, бұл жинақты қатар. Сонымен, берілген дәрежелік қатардың жинақтылық облысы: $[-1;1)$.

(6) қатарының жинақтылық интервалы $(a-R;\ a+R)$, мұндағы R - (6.1) қатарының жинақтылық радиусы.

D -кез келген бүтіндей (6) қатарының жинақтылық интервалының ішінде жататын кесінді болсын. Онда:

1. (6) қатары мажорланған (бірқалыпты жинақты) D кесіндісінде.
2. (6) қатарының қосындысы жинақтылық интервалында үзіліссіз.

3. (6) қатарын D кесіндісінде мүшелеп интегралдауға және қанша болса сонша рет мүшелеп дифференциалдауға болады, сонымен қатар, алынған дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы (6) қатарының жинақтылық интервалымен бірдей..

Мысал 6.2. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-2)}$.

Шешуі. $c_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$, $c_n\neq 0$ егер $n=3,4,...$ болса.

Онда $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-2)}=1$.

Сонымен, $R=1$- жинақтылық радиусы; $(-1,1)-$жинақтылық интервалы.

Интервалдың шеткі нүктелерінде берілген қатарды жинақтылыққа зерттейік.

$\mathrm{x}=-1$ болса:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)}=-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$$

Бұл қатарды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ жинақты қатарымен салыстырамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n(n-2)}:\frac{1}{n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n-2)}=1\neq 0\ .$$

Сонымен, салыстырудың екінші белгісі бойынша $\mathrm{x}=-1$ болғанда қатар абсолютті жинақты.

Егер $\mathrm{x}=1$ болса, онда берілген қатар мына түрде болады: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$.

Бұл қатардың мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған қатар: $\sum_{n\to 0}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$ жинақты қатар, ендеше жоғарыдағы таңбасы ауыспалы қатар абсолютті жинақты.

Сонымен, берілген қатар $\mathrm{x}\in[-1,1]$ болғанда абсолютті жинақты.